

Trigonometrik integraller

Trigonometrik integraller, integrandı trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonları olan integrallerdir.

1) $R(\sin x, \cos x)$ integralleri

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = u$ değişimi

b) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \sin x = u$ " "

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \tan x = u$ " "

d) Bunlar işe yaramaz ise $\tan \frac{x}{2} = u$ değişimi yapılır.

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olduğu daha önce verilmişti.

Örnek: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = ?$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = u \text{ değeriyle}$$

çarpılır.

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = - \int \frac{1 - u^2}{u^2} du$$

$$= - \int \frac{1}{u^2} du + \int du = \frac{1}{u} + u + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

$$= \sec x + \cos x + C.$$

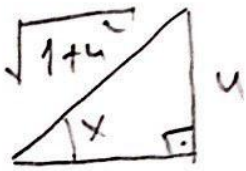
Örnek: $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = ?$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^2 (-\cos x)^4} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} = R(\sin x, \cos x)$$

$\Rightarrow \tan x = u$ dönüşümü yapılır.

$$\Rightarrow \sec^2 x dx = du \Rightarrow dx = \cos^2 x du = \frac{du}{1+u^2}$$



$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1+u^2}{u^2} \cdot \frac{(1+u^2)^2}{1+u^2} \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{1+2u^2+u^4}{u^2} du = \int \frac{du}{u^2} + 2 \int du + \int u^2 du$$

$$= -\frac{1}{u} + 2u + \frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{\tan x} + 2\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

$$= 2\tan x - \cot x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

2) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ integralleri

a) m tek, n çift veya m çift, n tek ise kuvveti çift olan değişken değişimi yapılır,

b) m ve n tek ise herhangi birine değişken değişimi yapılır,

c) m ve n çift ise

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bağıntıları kullanılarak integrantın derecesi düşürülür.

Örnek: $I = \int \sin^5 x \cos^2 x dx = ?$

$m = 5$ tek, $n = 2$ çift $\Rightarrow \cos x = u$ değişken değişimi yapılır.

$$\Rightarrow -\sin x dx = du$$

$$I = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = -\int (1 - u^2)^2 u^2 du$$

$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Örnek: $I = \int \sin^9 x \cos^3 x \, dx = ?$

$m=9$ tek, $n=3$ tek \Rightarrow Herhangi birine u denilebilir. Fakat kuvveti büyük olana u demek işlem kolaylığı sağlar.

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du$$

$$I = \int \sin^9 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^9 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int u^9 (1 - u^2) \, du = \int (u^9 - u^{11}) \, du = \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^{12}}{12} + C$$

$$= \frac{\sin^{10} x}{10} - \frac{\sin^{12} x}{12} + C.$$

Örnek: $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = ?$

m ve n çift olup $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ bağıntı-

ları kullanılarak integralin derecesi düşürülür.

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \cos^2 2x dx + \int \cos^3 2x dx \right] \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x dx &= \int \cos^2 2x \cos 2x dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ \left(\begin{array}{l} \sin 2x = u \\ \cos 2x dx = \frac{du}{2} \end{array} \right) &= \int (1 - u^2) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\cancel{\sin 2x}}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\cancel{\sin 2x}}{2} - \frac{\sin^3 2x}{3} \right] + C$$

3) $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$ tipindeki
integraler

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

bağıntıları kullanılarak hesaplanır.

Örnek: $I = \int \sin 7x \sin 4x dx = ?$

$$I = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 11x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 11x}{11} \right) + c.$$

Örnek: $I = \int \sin 5x \cos 3x dx = ?$

$$I = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} \right) + c$$

\hat{u}
Örnek: $I = \int \cos 4x \cos 3x dx = ?$

$$I = \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 7x}{7} + \sin x \right) + C$$

4) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ tipindeki integraller

a) n çift $\Rightarrow \tan x = u$ değişken değişimi,

b) m tek $\Rightarrow \sec x = u$ " " " yapılır.

c) m çift, n tek $\Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ bağıntısı yardımı ile integrant sadece $\sec x$ in tek kuvvetlerinin toplamı şekline dönüştürülür.

\hat{u}
Örnek: $I = \int \tan^6 x \sec^4 x dx = ?$

$m=6$ çift, $n=4$ çift \Rightarrow Herhangi birine u denilebilir.

$$\tan x = u \Rightarrow \sec^2 x dx = du$$

$$I = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^6 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx$$

$$= \int u^6 (1 + u^2) du = \int (u^6 + u^8) du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

Örnek: $I = \int \tan^5 x \sec^3 x dx = ?$

$$n = 5 \text{ tek} \Rightarrow \sec x = u \Rightarrow \tan x \sec x dx = du$$

$$I = \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \tan x \sec x = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \tan x \sec x dx$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

Yapı: m çift, n tek olduğun durumda integrant $\sec x$ in tek kuvvetlerinin toplamı haline geleceği için $\sec x$ in tek kuvvetlerinin integraline ihtiyaç duyulur.

Example: $I = \int \sec x dx = ?$

$$I = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$\sec x + \tan x = u$$

$$\Rightarrow (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx = du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Örnek: $I = \int \sec^3 x dx = ?$

$$\begin{aligned} I &= \int \sec x \sec^2 x dx = uv - \int v du = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ \sec x &= u, \sec^2 x dx = dv & & = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx \\ \sec x \tan x dx &= du \quad v = \tan x & & = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ & & & = \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + C_1$$

Örnek: $I = \int \tan^2 x \sec x dx = ?$

$m=2$ çift, $n=1$ tek $\Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ başlatırız, kullanacağız.

$$\begin{aligned} I &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx = \int (\sec^3 x - \sec x) dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} \\ &= \frac{\sec x \tan x}{2} - \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + C \end{aligned}$$

5) $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ tipindeki integraller

$\int \tan^m x \sec^n x dx$ integraline benzer şekilde yapılır.

$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ bağıntısından yararlanılır.

Örnek: $I = \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^4 x dx = ?$

$m=3$ tek, $n=4$ çift $\Rightarrow \cot x = u, -\operatorname{cosec}^2 x dx = du$

$$\Rightarrow I = \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x) \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= - \int u^3 (1 + u^2) du = - \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C$$

$$= - \frac{\cot^4 x}{4} - \frac{\cot^6 x}{6} + C$$